ARTUR BĂLĂUCĂ CĂTĂLIN BUDEANU

PRAVĂŢ CRISTIAN

DOINA NECHIFOR GABRIEL MÎRŞANU
MARIANA MORĂRAŞU JULIETA GRIGORAŞ

MATEMATICĂ

1225

DE PROBLEME PENTRU MICII MATEMATICIENI

CLASELE I - IV

OLIMPIADE, CONCURSURI JUDEŢENE, INTERJUDEŢENE, CENTRE DE EXCELENŢĂ
PREGĂTIREA ADMITERII ÎN CLASA a V-a
104 TESTE

Editura TAIDA
– IAŞI –

CUPRINS

Probleme rezolvate

1. Mutaţi un chibrit, la fiecare din operaţiile de mai jos, astfel încât să obţineţi rezultate corecte:

a) IV − I = VI; **b)** VII + I = V;
c) X + II = VII; **d)** IX + VII = I;
e) V + I + VI = I; **f)** X + II + II = IX;
g) X + III + V = XI; **h)** LX + XX = XC;

Rezolvare:

a) IV + I = V; **b)** VII − I = VI;
c) IX − II = VII sau X − III = VII; **d)** IX − VIII = I;
e) V + II − VI = I; **f)** IX − II + II = IX;
g) X − III + V = XII; **h)** CX − XX = XC;

2. Calculaţi 1918 – 1859 şi scrieţi rezultatul în sistemul roman de numeraţie.

Rezolvare:

MCMXVIII – MDCCCLIX = LIX.

I.2 SISTEMUL ZECIMAL DE NUMERAŢIE

➲ Cifre arabe: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

➲ Sistemul în care scriem numerele naturale este zecimal şi poziţional pentru că:

1. Zece unităţi de un anumit ordin formează o unitate de ordin imediat superior.

2. Cifrele reprezintă valori diferite în raport cu poziţia pe care o ocupă în scrierea numărului.

Exemple:

1 3 4 5 ← **1000 + 300 + 40 + 5**

1 2 3 4 6 1 5 ← **1000000+200000+30000+4000+600+10+5**

Reţineţi!

➲ Un număr natural de două cifre îl vom scrie sub forma $\overline{ab}$, unde a şi b sunt cifre (a este diferită de 0).

Avem: $\overline{ab} = 10a + b$.

Exemple: 23 = 2 · 10 + 3; 79 = 7 · 10 + 9; 80 = 8 · 10 + 0.

➲ Un număr natural de trei cifre îl vom scrie sub forma $\overline{abc}$, unde a, b, c sunt cifre (a este diferită de 0).

Avem: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ (scrierea zecimală a numărului $\overline{abc}$).

$235 = 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5$.

➲ Un număr natural de patru cifre îl vom scrie sub forma $\overline{abcd}$, unde a, b, c, d sunt cifre (a diferită de 0).

Avem: $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$ (scrierea zecimală a numărului $\overline{abcd}$).

$2314 = 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 4$.

➲ **Răsturnatul** numărului $\overline{ab}$ este numărul $\overline{ba}$, dacă cifrele a şi b sunt diferite de zero.

➲ **Răsturnatul** numărului $\overline{abc}$ este numărul $\overline{cba}$, dacă cifrele a şi c sunt diferite de zero.

➲ Şirul numerelor naturale este: 0; 1; 2; 3; ...; 9; 10; 11; ...; 99; 100; 101; ...

➲ Există oricât de multe numere naturale (şirul numerelor naturale începe cu zero şi este **nemărginit sau infinit**)

➲ Oricare două numere naturale alăturate din şirul numerelor naturale se numesc **numere consecutive**.

➲ Orice număr natural diferit de zero are un **predecesor** şi un **succesor**.

Exemplu: Numărul 25 are ca predecesor pe 24 şi ca succesor pe 26.

➲ Numerele naturale n şi $n + 1$ se numesc **numere consecutive**.

➲ Numărând din 2 în 2, pornind de la 0, obţinem şirul **numerelor pare**:

0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; ...; 30; 32; ...; 100; 102; ...

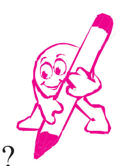
➲ Numerele pare au cifra unităţilor una din cifrele: 0; 2; 4; 6 sau 8.

➲ Şirul numerelor naturale pare este tot **infinit**.

➲ Numărând din 2 în 2, pornind de la 1, obţinem şirul numerelor **naturale impare**: 1; 3; 5; 7; 9; 11, 13; ...; 41; 43; 45; ...; 101; 103; 105; ...

➲ Numerele din şirul numerelor naturale impare au cifra unităţilor 1, 3, 5, 7 sau 9.

➲ Şirul numerelor naturale impare este tot **infinit**.



Probleme rezolvate

1. Victor, numărând din 2 în 2, a ajuns la numărul 384.
De la care dintre următoarele numere a pornit: 157; 182; 179; 171?

Rezolvare: Victor a pornit de la 182, deoarece ajunge la un număr par.

2. Câte numere pare şi câte numere impare se află între: **a)** 1 şi 40; **b)** 3 şi 52; **c)** 0 şi 20?

Rezolvare: **a)** 19 pare şi 19 impare; **b)** 24 pare şi 24 impare; **c)** 9 pare şi 10 impare.

3. Scrieţi toate numerele pare de trei cifre distincte folosind cifrele; 0; 3; 4.

Rezolvare: 304; 430; 340.

11. Găsiţi 3 numere naturale care să se bucure de proprietatea că suma cifrelor sale este egală cu produsul cifrelor. Sunt multe asemenea numere?

Rezolvare:

De exemplu, numărul 123 satisface condiţia pentru că $1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, dar şi numerele 132, 231, 213, 312 şi 321 satisfac condiţia. Observăm că dacă numărul conţine, de exemplu, cifrele 5 şi 6, atunci el trebuie să conţină şi $5 \cdot 6 - (5 + 6) = 19$ cifre egale cu 1. Dacă conţine, de exemplu, cifrele 2, 3 şi 7, atunci el trebuie să conţină şi $2 \cdot 3 \cdot 7 - (2 + 3 + 7) = 42 - 12 = 30$ cifre de 1 etc. Sau mai general; dacă numărul conţine cifrele a şi b din sistemul zecimal de numeraţie, atunci el trebuie să conţină şi $a \cdot b - (a + b)$ cifre egale cu 1, unde $a \geq 2$ şi $b \geq 2$, etc. Conchidem că sunt oricât de multe numere cu proprietatea dată.

PROBLEME PROPUSE

1. Sunt singurul număr impar cuprins între numerele 54 și 62 și, de asemenea, cuprins între 60 și 65. Cine sunt?

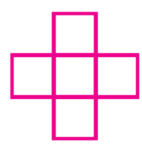
2. Sunt singurul număr par cuprins între numerele 39 și 46 și, de asemenea, cuprins între 43 și 48. Cine sunt?

3. **a)** Câte cifre trebuie să aibă un număr natural, astfel încât să poată avea suma cifrelor sale egală cu 10? **b)** Dar pentru a avea suma cifrelor egală cu 20?

4. Scrie în ordine descrescătoare toate numerele de două cifre cu diferența cifrelor 4.

5. Scrie în ordine crescătoare toate numerele de două cifre diferite ce au suma cifrelor egală cu 6.

6. Completează cu numere 2, 4, 6, 8, 10 în așa fel încât suma numerelor de pe linie și de pe coloană să fie aceeași.



7. Completați jocurile astfel încât să obțineți rezultate exacte pe orizontală și pe verticală.

a)

20	−	**10**	=	
+		+		+
	−		=	
=		=		=
28	−		=	**12**

b)

	−	**8**	=	**8**
+		+		+
	−	**6**	=	
=		=		=
24	−		=	

8. Un medic prescrie unui pacient 7 pastile pe care le ia din jumătate în jumătate de oră. De câte ore are nevoie pacientul pentru a lua toate pastilele?

CAPITOLUL III

„Matematica se face oriunde, oricând şi oricum.“

Grigore Moisil

PROPRIETĂŢILE ADUNĂRII ŞI ÎNMULŢIRII NUMERELOR NATURALE. FACTOR COMUN. ORDINEA EFECTUĂRII OPERAŢIILOR ŞI FOLOSIREA PARANTEZELOR

Reţineţi:

❖ **Proprietăţile adunării numerelor naturale**

➲ Adunarea este **comutativă** $a + b = b + a$, oricare ar fi numerele naturale a şi b.

Exemplu: $8 + 9 = 9 + 8$

➲ Adunarea este **asociativă** $(a + b) + c = a + (b + c)$, oricare ar fi numerele naturale a, b şi c.

Exemplu: $(20+35)+15 = 20+(35+15)$

➲ 0 este **element neutru** pentru adunarea numerelor naturale $a + 0 = a$, oricare ar fi numărul natural a.

Exemplu: $3 + 0 = 3$

➲ Putem utiliza proprietăţile adunării pentru a efectua calcule rapide:

Exemple:

Calculaţi cât mai rapid:

a) $3125 + 1745$; **b)** $57 + 63 + 21 + 79 + 37 + 43$.

Rezolvare:

a) $3125 + 1745 = (3100 + 25) + (1700 + 45) = (3100 + 1700) + (25 + 45) =$
$= 4800 + 70 = 4870$.

b) $57 + 63 + 21 + 79 + 37 + 43 = (57 + 43) + (63 + 37) + (21 + 79) =$

$= 100 + 100 + 100 = 100 \cdot 3 = 300$.

❖ **Proprietăţile înmulţirii numerelor naturale**

➲ Înmulţirea este **comutativă** $a \cdot b = b \cdot a$, oricare ar fi numerele naturale a şi b.

Exemplu: $3 \cdot 9 = 9 \cdot 3$

➲ Înmulţirea este **asociativă** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, oricare ar fi numerele naturale a, b şi c.

Exemplu: $(3 \cdot 10) \cdot 5 = 3 \cdot (10 \cdot 5)$

CAPITOLUL VI

„Sârguinţa nu ne ajunge, din păcate trebuie ceva mai mult, o idee.“
(W. Blasch)

SUME DE TIP GAUSS

➲ Să observăm!

Considerăm suma primelor 20 de numere naturale nenule: $S=1+2+3+...+20$.

Observăm că suma termenilor 1 şi 20 este 21, termenii 2 şi 19 au suma tot 21, la fel ca 3 şi 18, ş.a.m.d.

Scriind suma S în două moduri, odată cu termenii în ordine crescătoare şi o dată cu termenii în ordine descrescătoare obţinem:

$S=1+2+3+...+18+19+20$

$S=20+19+18+...+3+2+1$

Adunând cele două egalităţi parte cu parte, obţinem: S + S = 2S = (1 + 20) + + (2 + 19) + (3 + 18) + ... + (18 + 3) + (19 + 2) + (20 + 1) = $=\underbrace{21+21+...+21}_{\text{20 termeni}}$, sau $2\cdot S = 20 \cdot 21$ de unde $S = (20 \cdot 21) : 2$.

Folosind aceeaşi idee putem calcula, suma primelor n numere naturale nenule, oricare ar fi n număr natural.

Să calculăm suma primelor n numere naturale nenule folosind aceeaşi idee:

$$\left.\begin{array}{l} S=1+2+3+...+(n-2)+(n-1)+n \\ S=n+(n-1)+(n-2)+...+3+2+1 \end{array}\right\} \oplus \text{ implică}$$

$2\cdot S=\underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+...+(n+1)+(n+1)}_{\text{de } n \text{ ori}}$, de unde $S = [n \cdot (n + 1)] : 2$.

➲ Putem concluziona că $1+2+3+...+n=\left[n(n+1)\right]:2$.

Dacă vom avea de calculat suma primelor 100 de numere naturale nenule, atunci conform regulii de mai sus avem că: 1 + 2 + 3 + … + 100 = = 100 · (100 + 1) : 2 = 5050. Acest mod ingenios de a aplica proprietăţile adunării (**asociativitatea şi comutativitatea**) a fost descoperit de un copil. Acest copil, care ulterior a devenit unul dintre marii matematicieni ai lumii, se numea **Karl Friedrich Gauss** (1777-1855).

Într-o zi, făcând o şotie, a fost pedepsit să stea în genunchi la vestitul colţ cu grăunţe, până va aduna mintal toate numerele naturale de la 1 la 100 inclusiv. Înainte de a ajunge la colţul cu pricina pentru a-şi executa pedeapsa, copilul în al doilea an de şcoală primară i-a dat rezultatul: 5050.

Metoda II

Este o metodă care spre deosebire de prima metodă se poate aplica şi în cazul celorlalte subpuncte. Pentru început este necesar să aflăm numărul de termeni ai sumei. Acest număr în cazul şirurilor de sume cu „salt constant" (diferenţa dintre orice doi termeni consecutivi este aceeaşi) este dat de formula $n = (u - p) : d + 1$, unde u este ultimul număr, p este primul număr, iar d este distanţa dintre doi termeni consecutivi. Aşadar, în cazul nostru, numărul de termeni al sumei este $(100 - 2) : 2 + 1 = 50$. Vom scrie suma o dată crescător şi o dată descrescător, după care le vom aduna termen cu termen:

$$\left.\begin{array}{l} A = 2 + 4 + 6 + ... + 96 + 98 + 100 \\ A = 100 + 98 + 96 + ... + 6 + 4 + 2 \end{array}\right\} \oplus$$

$$2 \cdot A = \underbrace{102 + 102 + 102 + ... + 102 + 102}_{\text{de 50 ori}}.$$

Prin urmare, $A = (102 \cdot 50) : 2 = 51 \cdot 50 = 2550$.

b) Vom completa cu termenii care lipsesc până la o **sumă Gauss** completă, după care vom scade suma acestor termeni pentru a nu influenţa valoarea sumei iniţiale. Prin urmare B = (1 + 2 + 3 + 4) + (5 + 6 + 7 + ... + 20) – – (1 + 2 + 3 + 4) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + ... + 20) – (4 · 5) : 2 = = (20 · 21) : 2 – 10 = 200.

c) Vom aduna şi apoi vom scade termenii care lipsesc pentru a avea o **sumă Gauss** completă. Aşadar, C = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + ... + 98 + 99 – – (2 + 4 + 6 + ... + 98) = (99 · 100) : 2 – 2 · (1 + 2 + 3 + ... + 49) = 99 · 50 – – 2 · (49 · 50) : 2 = 99 · 50 – 49 · 50 = 50 · (99 – 49) = 50 · 50 = 2500.

Metoda II: Observăm că toţi termenii sumei sunt numere naturale impare consecutive, deci putem scrie: C = (2 · 0 + 1) + (2 · 1 + 1) + (2 · 2 + 1) + ... + + ... + (2 · 49 + 1) = $\underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{\text{50 termeni}}$ + 2·1 + 2 · 2 + ... + 2 · 49 = 50 + 2 · (1 + 2 + ... + + ... + 49) = 50 + 2 · (49 · 50) : 2 = 50 + 49 · 50 = 50 · (1 + 49) = 2500.

d) ***Metoda I***:

Este de fapt **Metoda II** de la **a**). Observăm că avem de a face cu un şir de numere cu salt constant, în care $u = 51$, $p = 1$, $d = 5$ şi numărul de termeni $(51 - 1) : 5 + 1 = 11$.

$$\left.\begin{array}{l} D = 1 + 6 + 11 + ... + 41 + 46 + 51 \\ D = 51 + 46 + 41 + ... + 11 + 6 + 1 \end{array}\right\} \oplus \quad \text{de unde } 2D = \underbrace{52 + 52 + 52 + ... + 52 + 52}_{\text{de 11 ori}},$$

deci $D = (52 \cdot 11) : 2 = 26 \cdot 11 = 286$.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE

5. Calculaţi următoarele sume:

a) $A = 1 + 2 + 3 + ... + 19 + 20$;

b) $B = 0 + 1 + 2 + ... + 89$;

c) $C = 200 + 199 + 198 + ... + 2 + 1$;

d) $D = 999 + 998 + 997 + ... + 2 + 1$.

6. Calculaţi:

a) $A = 2 + 4 + 6 + ... + 78 + 80$;

b) $B = 3 + 6 + 9 + ... + 147 + 150$;

c) $C = 0 + 5 + 10 + ... + 145 + 150$;

d) $D = 11 + 22 + 33 + ... + 242 + 253$;

e) $E = 7 + 8 + 9 + ... + 45 + 46$;

f) $F = 33 + 34 + 35 + ... + 79 + 80$.

7. Să se calculeze sumele următoare:

a) $A = 1 + 3 + 5 + ... + 47 + 49$;

b) $B = 1 + 4 + 7 + ... + 97 + 100$;

c) $C = 4 + 9 + 14 + ... + 104 + 109$;

d) $D = 600 + 596 + 592 + ... + 328 + 324$.

8. Calculaţi:

a) $1 + 2 + 3 + ... + 2014 - 1001 - 1002 - ... - 1014 - 500500 =$

b) $3 + 5 + 7 + ... + 2013 - 2 - 4 - 6 - ... - 2012 =$

9. Comparaţi numerele a şi b, unde:

a) $a = 2012 - 2011 + 2010 - 2009 + ... + 2 - 1$;

b) $b = 2012 - 2010 + 2008 - 2006 + ... + 8 - 6 + 4 - 2$.

10. Comparaţi numerele a şi b, unde: $a = 100 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 102)$ şi $b = 102 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 100)$. ***(etapa locală, Iaşi 1998)***

11. Aflaţi x din relaţiile de mai jos:

a) $2x + 4x + 6x + ... + 4028x = 2014 \cdot 2015$;

b) $x + 3x + 5x + ... + 2013x = 2x + 4x + 6x + ... + 2012x + 3021$.

12. Aflaţi-l pe x din relaţia de mai jos:

$$x \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 2014) - (1 + 3 + 5 + ... + 2013) \cdot x = 2014 \cdot 2016.$$

13. Câţi termeni are şirul 1, 2, 2, 3, 3, 3, ..., $\underbrace{32, 32, ... 32}_{\text{de 32 ori}}$?

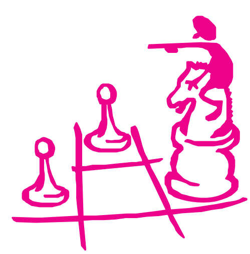
14. Calculaţi suma:

$S = 1000 \cdot 999 - 999 \cdot 998 + 998 \cdot 997 - 997 \cdot 996 + ... + 4 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1$.

15. Calculați:

$$S = 99 - 100 + 101 - 102 + 103 - 104 + ... + \\ + ... + 997 - 998 + 999 - 1000 + 1001.$$

16. La stadion se întâlnesc 8 colegi. Fiecare dă mâna o singură dată cu fiecare coleg. Câte strângeri de mână au loc?



CAPITOLUL IX

„În matematică nu există un drum special pentru regi.“

Euclid

OLIMPIADE, CONCURSURI JUDEŢENE ŞI INTERJUDEŢENE, SUBIECTE PENTRU ADMITEREA ÎN CLASA A V-A

CLASA I

1 Concursul „Florica T. Câmpan“, etapa municipală, Iaşi, 2005, ediţia a V-a

I. Descoperiţi regula şi completaţi şirul:

3		7	9			15

II. 1. În aceeaşi formă înlocuieşte în fiecare caz acelaşi număr. Completaţi:

□ + □ = 16

△ − 7 = □

△ + □ = ○

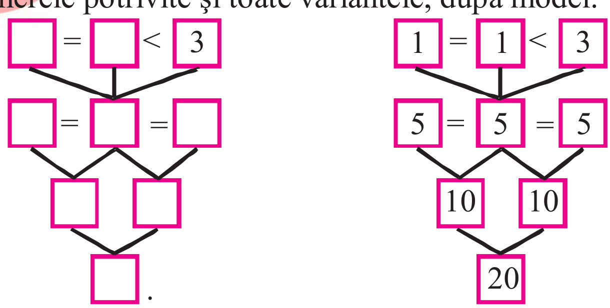
2. De câte ori apare cifra 3 în toate numerele de la 1 la 34 (inclusiv)?

III. 1. Ana şi încă patru colegi ai săi vin să o ajute la culesul merelor. Fiecare copil primeşte câte un coş în care încap 4 kilograme de mere şi pe care îl umple o singură dată. Câte kilograme de mere au cules Ana şi colegii săi?

2. Patru căţei pleacă în acelaşi timp şi aleargă 12 kilometri într-o oră. Cât aleargă un singur căţel într-o oră ?

IV. 1. Din suma numerelor 24 şi 3 scade vecinul mic al lui 4 şi adună vecinul mare al lui 5.

2. Găseşte numerele potrivite şi toate variantele, după model:



42 Concursul interjudeţean „Dimitrie Pompeiu“, ediţia a XVIII-a, Botoşani, 2018

1. Dacă într-o sală de clasă se aşază câte un elev în fiecare bancă, rămân 9 elevi fără loc în bancă. Dacă se aşază câte doi în bancă, rămân 6 bănci goale. Câte bănci şi câţi elevi sunt în clasă? ***(Gazeta Matematică)***

2. Un număr natural se împarte la 4 şi dă restul 3. Câtul împărţirii se împarte din nou la 4 şi dă restul 3. Noul cât se împarte din nou la 4 şi dă câtul 3 şi restul 2. Care a fost numărul iniţial? ***(Mariana Ciobănaşu)***

3. O vulpe a zărit un iepuraş la 86 metri în faţa sa. Cât timp vulpea face 3 salturi de câte 2 metri fiecare, iepuraşul face 4 salturi de câte un metru fiecare.
a) Câţi metri va parcurge vulpea până va prinde iepuraşul? Justificaţi.
b) Câţi metri va parcurge iepuraşul până este înhăţat de vulpe?

4. Problemă suplimentară. Produsul vârstelor a patru copii din familia Popescu exprimate prin numere naturale este egal cu 360, iar suma vârstelor acestora nu depășește 46 de ani. Aflați câți ani are fiecare copil dacă doi dintre ei sunt gemeni, cel mare este elev premiant, iar cel mic are părul roșcat. ***(Artur Bălăucă)***

43 Concursul interjudeţean „Dimitrie Pompeiu“, ediţia a XIX-a, Botoşani, 2019

1. Alina are de şase ori mai mulţi bani decât jumătate din suma de bani pe care o are Mihnea. Ce sumă de bani are fiecare dacă Alina are cu 200 de lei mai mult decât Mihnea? ***(xxx)***

2. a) Dacă înaintea unui număr de o cifră scriem cifra 4, numărul obţinut este cu 9 mai mic decât numărul care se obţine dacă scriem cifra 4 la sfârşitul lui. Care este acel număr?
b) Care este numărul format din trei cifre consecutive care adunat cu răsturnatul său dă 888? ***(G.M. Nr. 1/2019)***

SOLUŢII. INDICAŢII. RĂSPUNSURI. COMENTARII. MODELE DE PROBLEME REZOLVATE

Cugetare: „*Gândul este un fulger între două răstimpuri de beznă, dar acest fulger e total.*“

Henri Poincaré

CAPITOLUL I. SISTEME DE NUMERAŢIE.

I.2. SISTEMUL ZECIMAL DE NUMERAŢIE

1. 61. **2.** 44. **3.** **a)** cel puțin două cifre; **b)** cel puțin trei cifre. **4.** 95, 84, 73, 62, 51, 40.
5. 15, 24, 42, 51.

6.

	2	
4	10	6
	8	

	4	
6	2	8
	10	

7. a)

20	−	10	=	10
+		+		+
8	−	6	=	2
=		=		=
28	−	16	=	12

b)

16	−	8	=	8
+		+		+
8	−	6	=	2
=		=		=
24	−	14	=	10

8. 3 ore. **9.** 1. **10.** 5. **11.** **a)** 4 + (4 + 4) + 1 = 13; **b)** La concurs participă 13 – 7 = 6 băieți, iar în fața lui Victor se află un băiat (6 – (4 + 1)). **12.** **a)** 5 tăieturi (6 bucăți); **b)** 11 tăieturi (12 bucăți); **c)** 3 tăieturi (4 bucăți). Pentru ultimele două bucăți de fiecare dată, efectuează o singură tăietură. **13.** **a)** 29; **b)** 899. **14.** **a)** 931865; **b)** 917865. **15.** Sunt 18 numere. **16.** **a)** Numerele sunt de forma $\overline{293ab}$, unde a și b iau câte 10 valori, deci sunt 10 · 10 = 100 de numere; **b)** Numerele sunt de forma $\overline{cd293}$, unde c ia 9 valori, iar b ia 10 valori. Deci, sunt 9 · 10 = 90 de numere. **17.** Numerele care au suma cifrelor 4 sunt: 4000, 3001, 3010, 3100, 2002, 2020, 2200, 2011, 2101, 2011, 1003, 1030, 1300, 1012, 1021, 1102, 1201, 1120, 1210, 1111. Sunt 20 de numere. Numerele care au produsul cifrelor 12 conţin cifrele: 1, 1, 2, 6 sau 1, 1, 3, 6 sau 1, 2, 2, 3 etc. **18.** Numerele sunt: 1279, 1369, 1378, 1459, 1468, 1567, 2359, 2368, 2458, 2467, 3457. **19.** **a)** Fie a şi a + 1 numerele căutate. Notăm cu u.c.(a) ultima cifră a numărului a. Dacă u.c.(a) = 0 atunci u.c.(a(a + 1)) = u.c.(0 · 1) = 0. Dacă u.c.(a) = 1 atunci u.c.(a(a + 1)) = u.c.(1 · 2) = 2. Analog vom analiza celelalte opt cazuri şi găsim că u.c.(a(a + 1) este 0, 2 sau 6; **b)** u.c(5b + 3) ∈ {3; 8} şi cum u.c.(a(a + 1)) este 0, 2 sau 6 rezultă că egalitatea a(a + 1) = 5b + 3 nu poate avea loc. **20.** **c)** A + B = 10a + 18b + 13 ⇒ A + B este impar ⇒ unul dintre ele va fi par iar celălalt impar ⇒ A · B va fi par. **21.** **a)** impar; **b)** par; **c)** impar. **22.** Se analizează cele 4 cazuri: **I.** a, b – pare: a + b = par, a – b = par. **II.** a – par, b – impar: a + b = impar, a – b = impar. **III.** a = impar, b = par: a + b – impar, a – b = impar. **IV.** a – impar, b – impar: a + b – par, a – b = par. *Concluzia:* a – b şi a + b au aceeaşi paritate. **23.** A + B = 10a + 18b + 13 ⇒ A + B este impar ⇒ unul dintre numerele A și B va fi par iar celălalt impar ⇒ A · B va fi impar. **24.** Dacă a şi b sunt numere impare atunci a + b = număr par ⇒ (a + b) : 2 este număr natural; **b)** (a + b) : 2 + (b + c) : 2 + (c + a) : 2 = (a + b + b + c + c + a) : 2 = = (2a + 2b + 2c) : 2 = a + b + c = impar. Cum (a + b) : 2, (b + c) : 2 şi (c + a) : 2 sunt numere naturale, ori unul, ori toate trei numerele (a + b) : 2, (b + c) : 2,

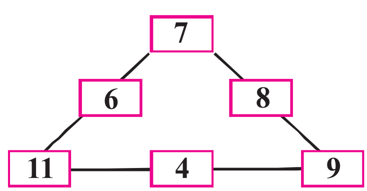
CAPITOLUL III. PROPRIETĂȚILE ADUNĂRII ȘI ÎNMULȚIRII NUMERELOR NATURALE. FACTOR COMUN. ORDINEA EFECTUĂRII OPERAȚIILOR ȘI FOLOSIREA PARANTEZELOR

1. **a)** 15; **b)** 3; **c)** 3; **d)** 9; **e)** 8; **f)** 18. **2.** **a)** 465; **b)** 25; **c)** 55; **d)** 596; **e)** 6200; **f)** 123. **3.** **a)** 22; **b)** 9; **c)** 9; **d)** 80; **e)** 4. **4.** **a)** $3 + 5 \cdot \{82 + 3 \cdot [21 + 4 \cdot (24 - 9)]\} = 3+5\cdot[82+3\cdot(21+4\cdot 15)] = 3+5\cdot(82+3\cdot 81) = 3+1625 = 1628$; **b)** $\{15+2\cdot[4+3\cdot(270+27-5-5-5)-1400]\}\cdot 3 = [15+2\cdot(4+3\cdot 282)-1400]\cdot 3 = (15+1700-1400)\cdot 3 = 315\cdot 3 = 945$; **c)** $42+18\cdot[50+3\cdot(21+2\cdot 145-24)-900]-43 = 42+18\cdot(50+3\cdot 287-900)-43 = 42+18\cdot 11-43 = 197$; **d)** $2013+(989+993-343) = 3652$; **e)** $70+2\cdot[9+3\cdot(30+3\cdot 27)] = 70+2\cdot(9+333) = 754$; **f)** $2014-[2012-(2012-1)] = 2014-(2012-2011) = 2013$.
5. **a)** $\left[(15+21)\cdot 2+9\right]\cdot 3-(20\cdot 4-50) = 213;\ 81\cdot 3-30 = 213; 243-30 = 213$ (adevărat); **b)** $10\cdot\left[2+10\cdot(140+5\cdot 125)\right]-1913\cdot 40 = 0;\ 10\cdot(2+10\cdot 765)-76520 = 0;$ $10\cdot 7652\cdot 76520 = 0$ (adevărat); **c)** Avem $50+45\cdot[(206-30+32:8):18]+12 = 2014$ sau $50+45\cdot(180:18)+12 = 2014$ sau $50+450+12 = 2014$, adică $512 = 2014$ (fals); **d)** $4\cdot(444+1110)-12\cdot\left[(16-4)-50:5\right] = 56\cdot 111-24$ sau $4\cdot 1554-12\cdot 2 = 56\cdot 111-24$ sau $6216-24 = 6216-24$ (adevărat).
6. **a)** $a+b+c = a+(b+c) = 5+12 = 17$; **b)** $5a+2b+2c = 5\cdot 5+2(b+c) = 25+2\cdot 12 = 49$; **c)** $ab+ac+11b+11c = a(b+c)+11(b+c) = 5\cdot 12+11\cdot 12 = 192$; **d)** $2ab+2ac+9 = 2a(b+c)+9 = 2\cdot 5\cdot 12+9 = 129$; **e)** $2ab+2ac+3b+3c+8 = 2a(b+c)+3(b+c)+8 = 2\cdot 5\cdot 12+3\cdot 12+8 = 164$. **7.** $6a+14b-3c = 6a+8b+6b-3c = 2(3a+4b)+3(2b-c) = 2\cdot 15+3\cdot 3 = 39$. **8.** $\{\{[(1+2):3+4]:5+6\}:7+8\}:9+10 = 11$. **9.** $2004 = (1111-111)\cdot(1+1)+1+1+1+1$; $2004 = (999+9:9)\cdot(9+9):9+(9+9+9+9):9$; $2004 = 333\cdot(3+3)+3+3$. **10.** $8\times(5+9:3) = 64$.
11. $(7+7)\cdot 7+7:7+7:7 = 100$.

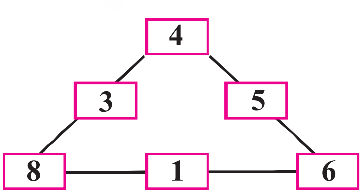
12.

9	+	9	–	9	–	9	=	0
9	–	9	+	9	–	9	=	0
9	×	9	–	9	×	9	=	0
9	:	9	–	9	:	9	=	0
9	×	9	:	9	–	9	=	0
9	:	9	×	9	–	9	=	0

13.



14.



4. Metoda figurativă

○ - reprezintă suma inițială din pușculița lui Gigel.

□ - reprezintă suma inițială din pușculița lui Ionel.

Avem: ○ + 200 lei = □ – 200 lei

□ – 200 lei

□ – 200 lei } => ○ + 800 lei = □ □ □

○ – 200 lei = □ + 200 lei => ○ = □ + 600 lei

□ + 200 lei □

Deci □ □ + (600 lei + 800 lei) = □ □ □

Prin urmare □ = 1400 lei și, ○ = 1400 · 2 + 600 = 3400 lei și lui Gigel îi mai rămân în pușculiță 2100 lei, iar lui Ionel 100 lei.

101. Concursul „Viitori olimpici”, 2019

1. Avem relațiile: $\overline{abc} = 29n + (n+1)$, $n+1 < 29$ sau $\overline{xyz} = 29 \cdot (p+1) + p$, $p < 29$.

$\overline{abc} = 30n + 1$, unde $100 \le 30n + 1 \le 999 \Leftrightarrow 99 \le 30n \le 998 \Leftrightarrow 4 \le n \le 33$;
sunt 33 – 3 = 30 de numere.

$\overline{xyz} = 30p + 29$, unde $100 \le 30p + 29 \le 999 \Leftrightarrow 71 \le 30p \le 970 \Leftrightarrow 3 \le p \le 32$;
sunt 32 – 2 = 30 de numere. În concluzie, sunt 60 de numere cu proprietățile din enunț.

2. Descompunem curtea școlii în pătrate cu latura de 7 m. Obținem astfel 6 x 5 = 30 de pătrate cu latura de 7 m și cu aria de 49 metri pătrați. Cum în clasă sunt 31 de elevi, conform **principiului cutiei**, există cel puțin 2 elevi care se află pe o suprafață pătrată cu aria de 49 metri pătrați.

3. $a = 1 \Rightarrow b + c =$ impar.
– dacă b ia valorile: 0; 2; 4; 6 sau 8, de fiecare dată c ia valorile: 1; 3; 5; 7 și, respectiv, 9 – sunt 5 x 5 = 25 de numere.
– dacă b ia valorile: 1; 3; 5; 7; 9, de fiecare dată c ia valorile: 0; 2; 4; 6; 8 – sunt 5 x 5 = 25 de numere. Prin urmare, dacă a ia valorile 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9, de fiecare dată se obțin câte 50 de numere care au suma cifrelor pară.

Deci sunt în total 50 · 9 = 450 de numere de forma $\overline{abc}$ care au suma cifrelor număr par.

Soluție rapidă: Sunt 900 de numere de forma $\overline{abc}$, dintre care 450 au suma cifrelor pare și 450 au suma cifrelor impare.